

# Berechnung der Farbe

## Aus Lichtstrahlen werden Empfindungen



Deutsche farbwissenschaftliche Gesellschaft  
Virtuelle Tagung 16. Oktober 2020  
Werner Rudolf Cramer

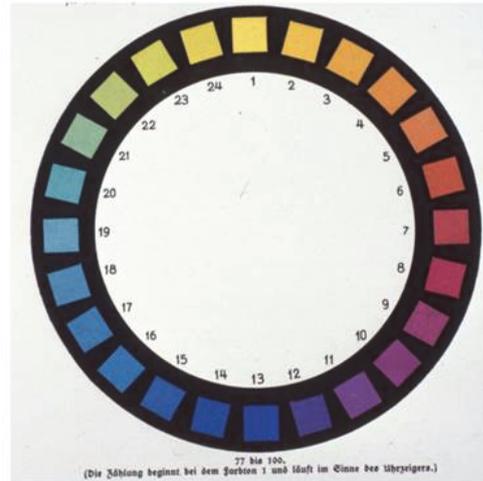
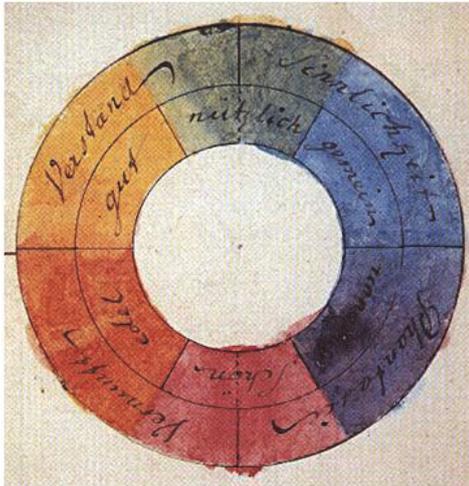
## Zwei Richtungen

---

- Über viele Jahrhunderte haben sich Künstler und Forscher mit dem Phänomen Farbe beschäftigt
- *Einerseits* leiteten sie ihre Ergebnisse von Mischversuchen ab (Goethe, Runge, Kandinsky)
- *Andererseits* bauten sie auf physiologischen Experimenten auf (Maxwell, Ostwald, Munsell)
- Beide Richtungen stehen im Gegensatz, weil sie unterschiedliche Ansätze verfolgen

## Goethe vs. Ostwald

- Links: Goethes Farbkreis beruht auf Mischungen
- Rechts: Der Ostwaldsche Farbkreis basiert auf Kreisversuchen



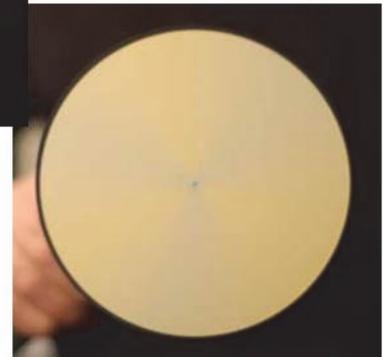
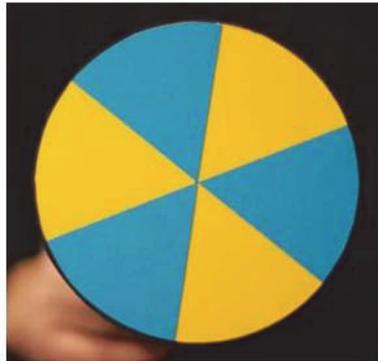
## Vor dem Auge = Physik

- Die Mischversuchen spiegeln die Reaktionen von Farbpigmenten wider
- Diese Versuche sind physikalischer Natur und haben mit dem Sehen und Farbempfinden nichts zu tun
- Dem Auge ist es egal, ob ein grünes Farbpigment oder eine Mischung aus blauen und gelben Pigmenten vorliegt -> es kann beide nicht unterscheiden
- ***Alles, was vor dem Auge passiert, ist Physik***

## Unterschiede beim Mischen

---

- Unten:  
Mischungen mit  
Pigmenten
- Rechts:  
Mischungen mit  
einem Kreisel



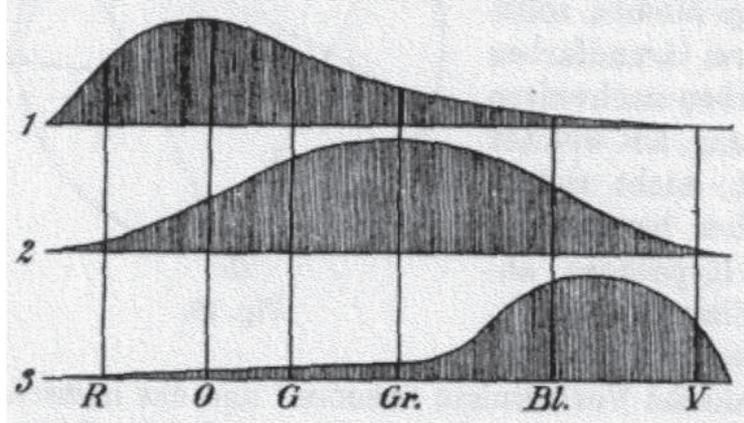
## Dreifarben-Theorie

---

- Die physiologische Beschreibung orientiert sich an unserem Farbempfinden
- Hermann von Helmholtz und Thomas Young entwickelten die Dreifarben-Theorie, nach der wir drei verschiedene Rezeptoren für Lichtstrahlen in der Netzhaut besitzen
- Sie sind maximal für Rot, Grün und Blau empfindlich

## Reaktion dreier Rezeptoren

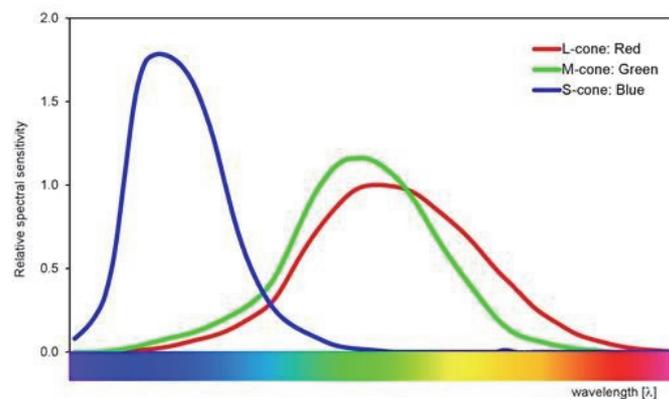
- Der daraus entstehende optische Reiz basiert immer auf der Reaktion aller drei Rezeptoren



Von Hermann von Helmholtz - Hermann von Helmholtz: Gesammelte Schriften III.2, Olms-Weidmann, 2003, Fig. 21, Gemeinfrei, <https://commons.wikimedia.org/w/index.php?curid=15551427>

## Empfindlichkeitskurven der Zapfen

- Die Empfindlichkeitskurven der drei Zapfenarten
- Die Kurven der roten und grünen Zapfen überschneiden sich stark
- Die grünen Zapfen sind entwicklungsgeschichtlich aus den roten Zapfen entstanden



## Vierfarben-Theorie

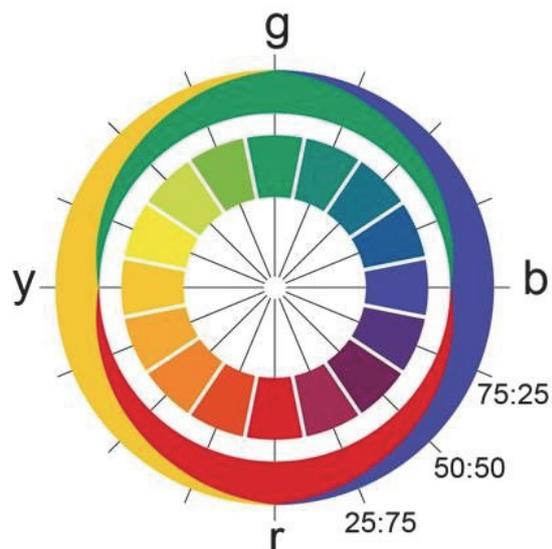
---

- Ewald Hering postulierte dagegen seine Vierfarben-Theorie (Theorie der Gegenfarben)
- Danach stehen sich die Farbpaare Gelb – Blau und Rot – Grün gegenüber:  
Kein Rot kann grünlich sein, es kann nur gelblich oder bläulich sein. Ebenso kann kein Grün rötlich sein.  
Gelb kann nicht bläulich sein, sondern nur grünlich oder rötlich. Und Blau kann nicht gelblich sein, sondern nur grünlich oder rötlich

## Farbkreis nach Hering

---

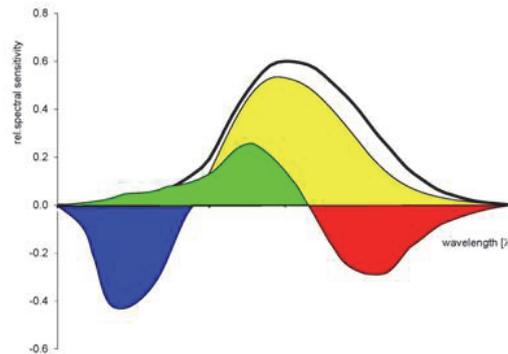
- Rot und Grün stehen sich gegenüber,
- Ebenso wie Gelb und Blau



## Kombination beider Theorien

---

- Johannes von Kries kombinierte die Dreifarben-Theorie mit der Vierfarbentheorie.
- Dabei setzte er in komplementären Wahrnehmungen die Empfindlichkeiten der Zapfen sowie das Hell-Dunkel-Sehen zusammen



## Hinter dem Auge: Physiologie

---

- Vor dem Auge existieren nur Lichtstrahlen, die von der Sonne zur Erde gelangen
- Sie können in unterschiedlicher Art und Weise manipuliert werden (Absorption, Brechung, Spiegelung, Interferenz)
- Die manipulierten Lichtstrahlen gelangen auf die Netzhaut, wo sie von Zapfen (und Stäbchen) in optische Reize umgewandelt werden
- Diese optischen Reize lösen im Gehirn eine Farbempfindung aus

## Graßmannsche Gesetze (Hermann Günther Graßmann 1809 – 1877)

---

- 1. Graßmannsches Gesetz:  
Jede Farbe wird durch die drei Grundgrößen Farbton (Hue), Farbintensität (Saturation) und Helligkeit (Lightness) beschrieben (HSV)
- 2. Graßmannsche Gesetz:  
Farbmischungen entsprechen den Farbveränderungen an einer Ausgangsfarbe
- 3. Graßmannsche Gesetz:  
Der Farbton einer additiven Mischung hängt nur vom Farbeindruck der Mischfarben ab. Ihre Reflexionseigenschaften können nicht bestimmt werden.
- 4. Graßmannsche Gesetz:  
Die Intensität einer additiven Farbmischung entspricht der Summe der Ausgangsintensitäten

## Experimente mit Normalbeobachtern

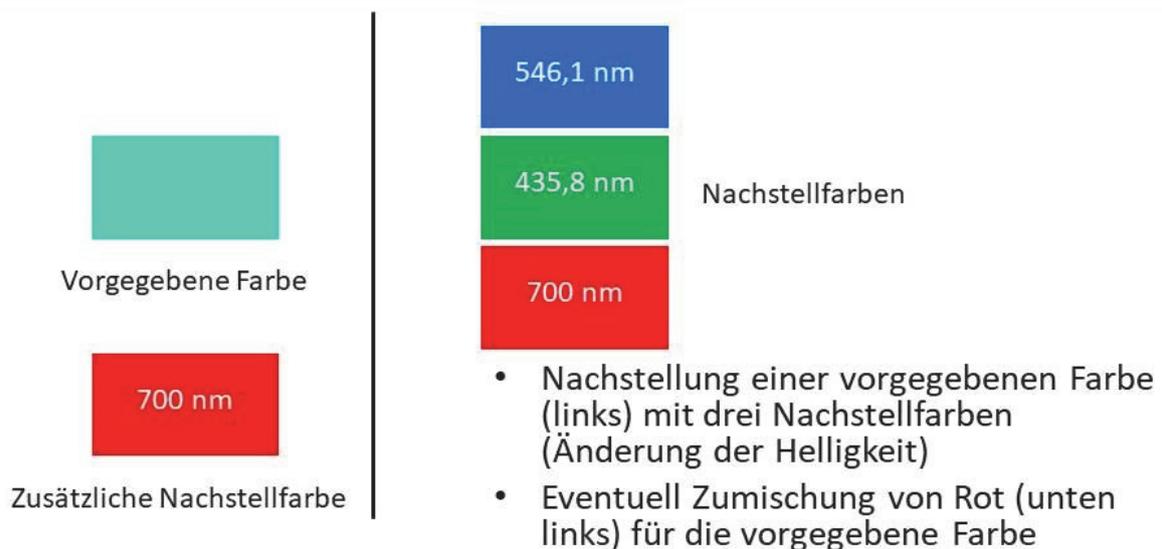
---

- Diese Darstellungen führten im Jahre 1931 zu den Festlegungen durch die CIE (Commission internationale de l'éclairage)
- Sie basierten auf Versuchen von David Wright und John Guild
- Wright und Guild definierten drei Lichter (Hg-Lampen) mit Spektrallinien bei 435.8 nm (blau) und 546.1nm (grün) sowie ein Kunstlicht bei 700 nm (rot) (ab 650 nm sehen wir keine Unterschiede)

## Nachstellen von Farben

- Hiermit mischten sie Farben, die von “Normalbeobachter” mit definierten Lichtfarben (Änderung der Helligkeiten) nachgestellt werden sollten
- Für den Fall, dass die vorgegebene Farbe nicht mit den drei Farben nachstellbar war, konnte zur vorgegebenen Farbe bei Bedarf Rot zugemischt werden.
- Insgesamt waren 17 Normalbeobachter beteiligt

## Schema der Versuche



## Positive Empfindlichkeitskurven

---

- Aus diesen Werten entstanden die drei Empfindlichkeitskurven für  $\bar{r}$ ,  $\bar{g}$  und  $\bar{b}$
- Die Rot-Kurve enthielt negative Werte
- Um nur positive Werte zu erhalten, wurden die Kurven umgerechnet
- Die Kurven bezogen sich auf den sogenannten 2°-Normalbeobachter (2°-Sehfeld)

## Umrechnung rgb -> xyz

---

$$x = 2.7689r + 1.7518g + 1.1302b$$

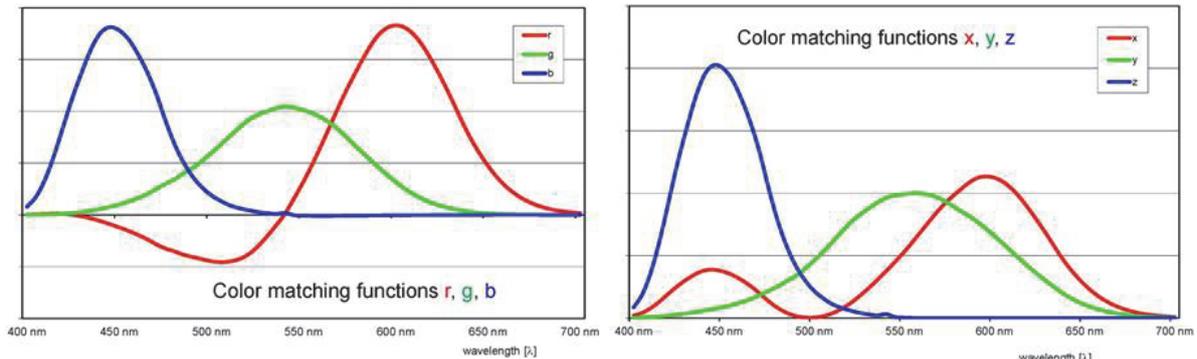
$$y = 1.0000r + 4.5907g + 0.0601b$$

$$z = \phantom{1.0000r + 4.5907g} + 5.5943b$$

	r	g	b	x	y	z
450 nm	-0.0121	0.0068	0.3167	0.3364	0.0380	0.0007
540 nm	-0.0315	0.2146	0.0014	0.2902	0.9538	0.0001
620 nm	0.2971	0.0182	-0.0002	0.8544	0.3808	0.0000

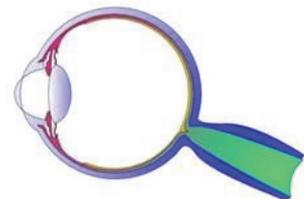
## Original- und umgerechnete Kurven

- Links: Originalergebnisse mit negativen Rot-Werten  
(Michael Stifel in Arithmetica integra 1544: numeri absurdi (auch magische Quadrate, Juxtazeichen, Exponent, Gleichheitszeichen: facit))
- Rechts: Umrechnung der r-, g- und b-Werte in positive x-, y- und z-Werte

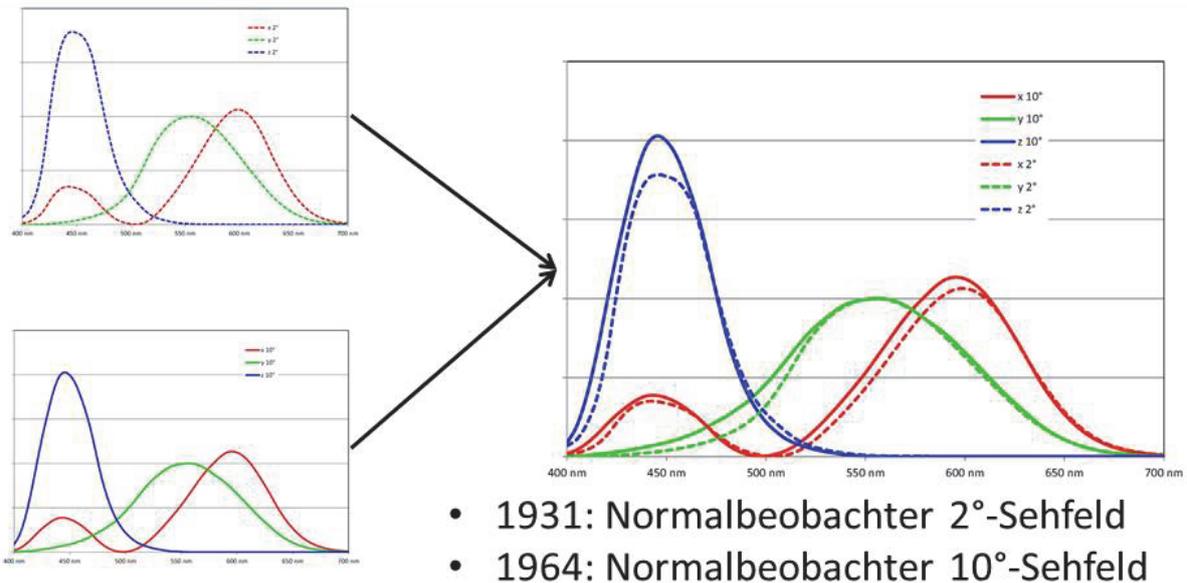


## 2°-Normalbeobachter

- 1931 hat man den 2°-Normalbeobachter definiert  
Dieser guckt auf eine kleine Fläche (etwa Münzgröße) mit den farbempfindlichen Zellen im Gelben Fleck
- 1964 wurden die Versuche mit dem 10°-Normalbeobachter wiederholt  
Hier wurde ein größeres Beobachtungsfeld (etwa DIN-A4-Blatt) in der Retina berücksichtigt
- Die Unterschiede waren geringfügig



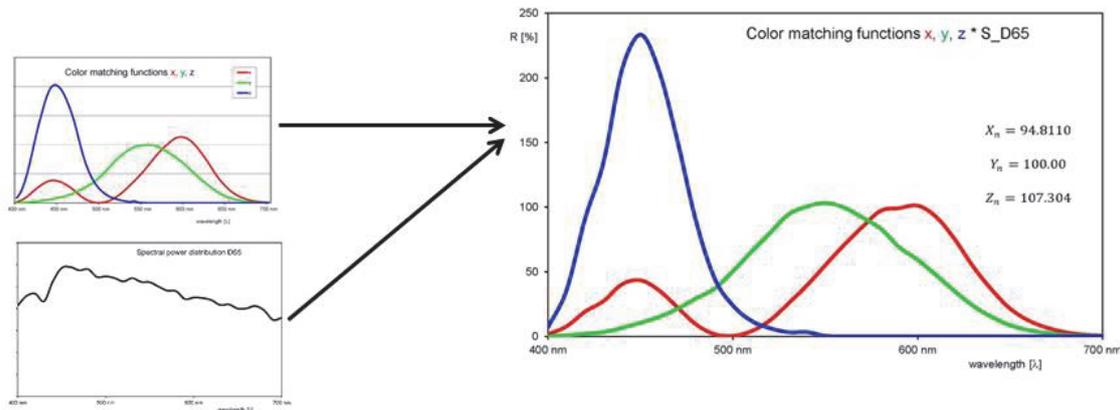
## Vergleich 2°- und 10°-Beobachter



## Bezug auf die Lichtquelle

- Im weiteren Schritt wurden die Spektralwerte jeweils mit den Werten der genormten spektralen Strahlungsverteilungskurve (hier für D65) multipliziert
- Die Flächen der drei neuen Kurven (bezogen auf D65) werden berechnet
- Der Summenwert für die y-Kurve wird auf 100 gesetzt (größte Empfindlichkeit) und die anderen Werte entsprechend umgerechnet

# Berechnung der Flächen (Integrale)



- Die Normspektralwerte werden mit den Werten der Strahlungsverteilung multipliziert
- Die Flächen unter den Kurven ergeben die Normfarbwerte  $X_n$ ,  $Y_n$  und  $Z_n$
- Von den Normfarbwerten kann nicht auf die Reflexionen zurückgerechnet werden

## Zahlenbeispiel

Golfgrün/Golfgreen							
Wellenlänge	400 nm	410 nm	420 nm	...	680 nm	690 nm	700 nm
REM-Werte	6.52	7.18	7.75	...	3.06	3.23	3.36
S_D65	82.80	91.50	93.40	...	78.30	69.70	71.60
x_Werte (Normspektralwerte)	0.02	0.08	0.20	...	0.04	0.02	0.01
y_Werte	0.00	0.01	0.02	...	0.02	0.01	0.00
z_Werte	0.09	0.39	0.97	...	0.00	0.00	0.00
S_D65*x_Werte	1.58	7.75	19.10	...	3.20	1.39	0.69
S_D65*y_Werte	0.17	0.81	2.00	...	1.24	0.54	0.26
S_D65*z_Werte	7.12	35.63	90.83	...	0.00	0.00	0.00
Summe							
S_D65*x_Werte	1101.05		X(N)	94.78			
S_D65*y_Werte	1161.66		Y(N)	100.00			
S_D65*z_Werte	1249.05		Z(N)	107.52			

- Strahlungsverteilungswerte S\_D65
- Normspektralwerte x, y und z
- Multiplikation der Werte mit den Strahlungsverteilungswerten (Wellenlänge für Wellenlänge)
- Summierung der Produkte (= Fläche)
- Die Summe der S\_d65\*y-Werte wird auf 100 gesetzt (entsprechende Anpassung der Berechnung der Messwerte)  
Dieses entspricht dem Grünwert und damit der höchsten Empfindlichkeit des Auges
- Daraus ergeben sich die Normfarbwerte  $X_n$ ,  $Y_n$  und  $Z_n$

## Berechnung der Normfarbwertanteile

---

- Aus den Normfarbwerten lassen sich die Normfarbwertanteile berechnen

$$x = \frac{X}{X+Y+Z} \quad y = \frac{Y}{X+Y+Z} \quad z = \frac{Z}{X+Y+Z}$$

- Die Normfarbwertanteile ergeben 1

$$x + y + z = 1$$

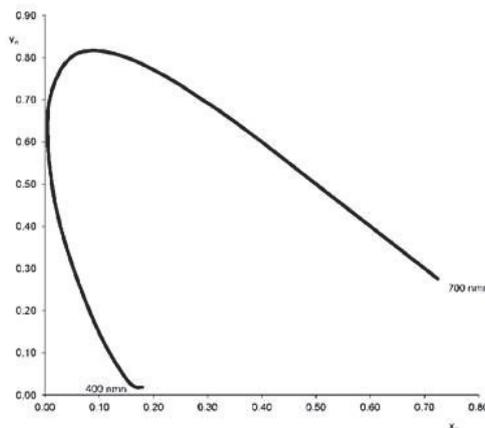
- Der Weißpunkt liegt bei

$$x = y = z = 0.33$$

## Spektralfarbenzug

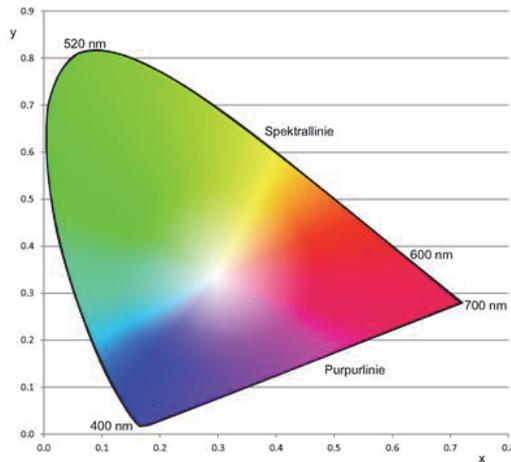
---

- Trägt man die Normfarbwertanteile  $x$  und  $y$  in ein Diagramm ein, so erhält man den Spektralfarbenzug von 400 nm bis 700 nm
- Er beschreibt die intensivsten Farben



## Darstellung der „Schuhsohle“

- Innerhalb des Spektralfarbenzuges liegen alle Farben
- Die Verbindung der Endpunkte wird als Purpurlinie bezeichnet
- Sie stellt Purpurfarben dar, die im Spektrum nicht vorkommen



$$\begin{aligned} X_n &= 94.8110 \\ Y_n &= 100.000 \\ Z_n &= 107.304 \end{aligned}$$

$$x_n = \frac{X_n}{X_n + Y_n + Z_n}$$

$$y = \frac{Y_n}{X_n + Y_n + Z_n}$$

$$z_n = \frac{Z_n}{X_n + Y_n + Z_n}$$

## Berechnung mit den Reflexionswerten

- Um die Farbe eines Musters zu bestimmen, werden zunächst dessen Reflexionswerte im Vergleich zu einem Weißstandard gemessen
- Diese Reflexionswerte werden dann mit den Produkten aus der Multiplikation der spektralen Verteilungswerten mit den Normspektralwerten ebenfalls multipliziert ( $S_{d65} \cdot x_{\text{Werte}}$ ,  $S_{D65} \cdot y_{\text{Werte}}$ ,  $S_{D65} \cdot z_{\text{Werte}}$ )

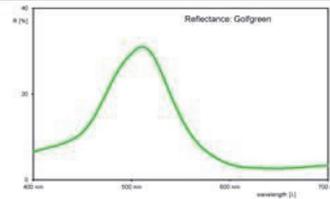
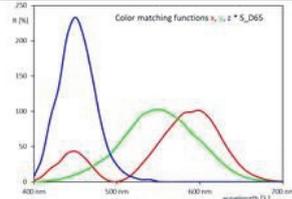
# Berechnungen

Golfgrün/Golfgreen							
Wellenlänge	400 nm	410 nm	420 nm	...	680 nm	690 nm	700 nm
REM-Werte	6.52	7.18	7.75	...	3.06	3.23	3.36

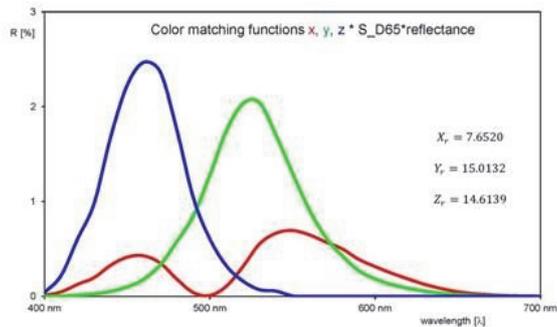
- Reflexionswerte des Farbmusters
- Multiplikation dieser Werte mit den Produkten  $S_{D65^*x\_Werte}$ ,  $S_{D65^*y\_Werte}$  und  $S_{D65^*z\_Werte}$
- Summierung der Werte
- Summierung der Produkte
- Die Summen entsprechen den Normfarbwerten  $X(R)$ ,  $Y(R)$  und  $Z(R)$  des Farbmusters

Umrechnung der REM-Werte:	400 nm	410 nm	420 nm	...	680 nm	690 nm	700 nm
$REM\_Werte * S_{D65^*x\_Werte} / (S_{D65^*y\_Werte})$	0.01	0.05	0.13	...	0.01	0.00	0.00
$REM\_Werte * S_{D65^*y\_Werte} / (S_{D65^*y\_Werte})$	0.00	0.00	0.01	...	0.00	0.00	0.00
$REM\_Werte * S_{D65^*z\_Werte} / (S_{D65^*y\_Werte})$	0.04	0.22	0.61	...	0.00	0.00	0.00
Summe	$X(R)$	7.65			$L^*$	45.65	
Summe	$Y(R)$	15.01			$a^*$	-49.64	
Summe	$Z(R)$	14.61			$b^*$	3.47	
Farbspektralwertanteil x	0.21						
Farbspektralwertanteil y	0.40						
Farbspektralwertanteil z	0.39						

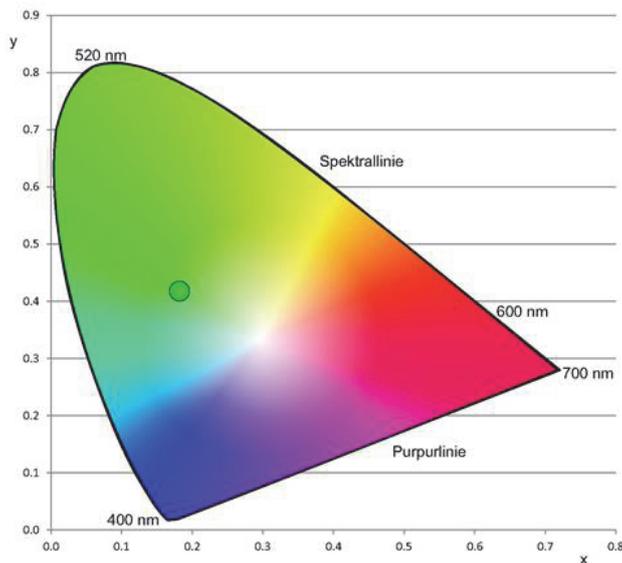
## Berechnung der Farbwerte



Multiplikation der Spektralwertverteilung, Normspektralwerten und Reflexionswerten



## Grafische Darstellung der Messwerte



$$\begin{aligned} X_r &= 7.6520 \\ Y_r &= 15.0132 \\ Z_r &= 14.6139 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x_r &= 0.2053 \\ y_r &= 0.4067 \\ z_r &= 0.3920 \end{aligned}$$

## L\*a\*b\*-Darstellung

- Die Darstellung der Farben in dem xy-System zeigt eine zu große Grünlastigkeit
- Um die Darstellung der Farbwerte zu verbessern, führte die CIE im Jahre 1976 das L\*a\*b\*-System ein:
  - L\* = Helligkeit
  - +a\* = Rot-Wert der Rot-Grün-Achse
  - -a\* = Grün-Wert der Rot-Grün-Achse
  - +b\* = Gelb-Wert der Gelb-Blau-Achse
  - -b\* = Blau-Wert der Gelb-Blau-Achse

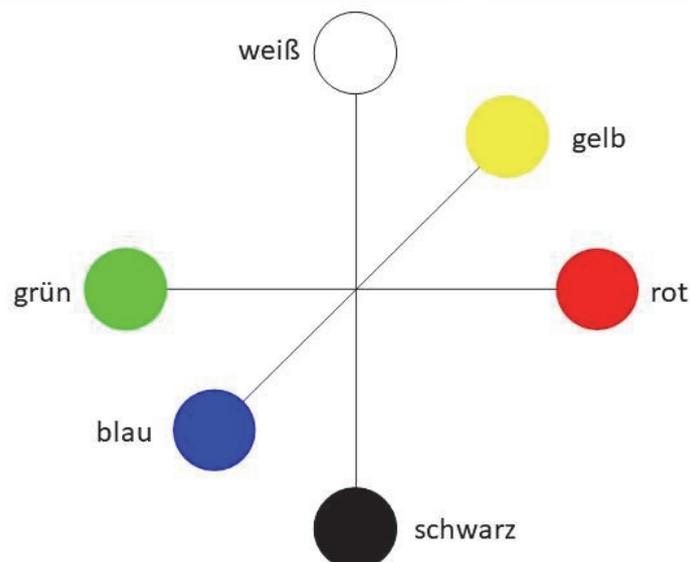
## Das L\*a\*b\*-System

---

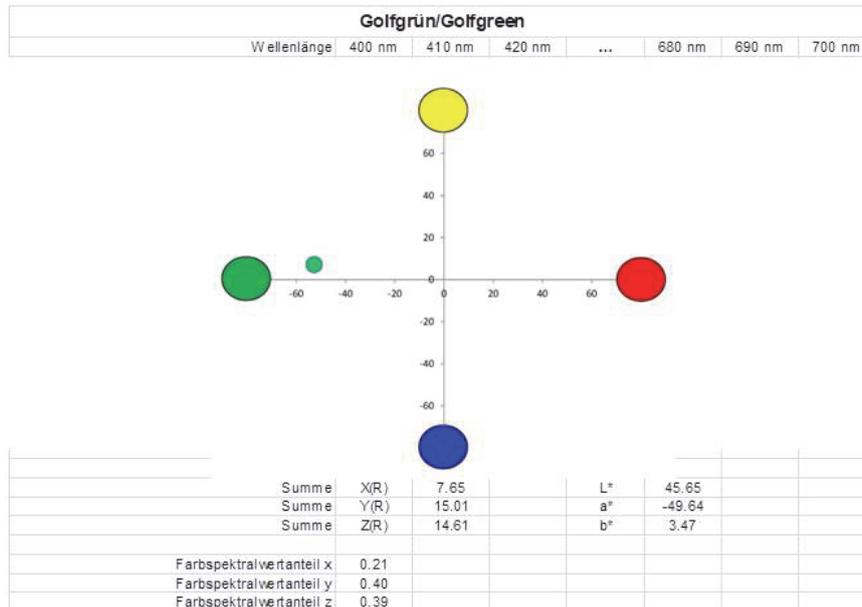
- Beim L\*a\*b\*-System stehen sich die Farbenpaare Rot - Grün und Gelb - Blau gegenüber
- Die Helligkeitsachse L\* steht senkrecht zu den anderen Achsen
- Berechnet werden diese Werte aus den Normfarbwerten  $X_n$ ,  $Y_n$  und  $Z_n$  sowie den Werten des Farbmusters  $X_r$ ,  $Y_r$  und  $Z_r$

## Das L\*a\*b\*-System

---



## Darstellung im a\*b\*-Chart



## Formeln: L\*a\*b\*

$$L^* = 116 * \sqrt[3]{\frac{Y}{Y_n}} - 16$$

$$a^* = 500 * \left( \sqrt[3]{\frac{X}{X_n}} - \sqrt[3]{\frac{Y}{Y_n}} \right)$$

$$b^* = 200 * \left( \sqrt[3]{\frac{Y}{Y_n}} - \sqrt[3]{\frac{Z}{Z_n}} \right)$$

Für kleine Werte gilt:

Wenn  $\frac{X}{X_n} < \frac{216}{24389} \approx 0.008856$ , dann  $\frac{1}{116} * \left( \frac{24389}{27} * \frac{X}{X_n} + 16 \right)$  anstelle der dritten Wurzel  $\sqrt[3]{\frac{X}{X_n}}$

Entsprechend auch für  $\sqrt[3]{\frac{Y}{Y_n}}$  und  $\sqrt[3]{\frac{Z}{Z_n}}$

## Formeln: L\*C\*h

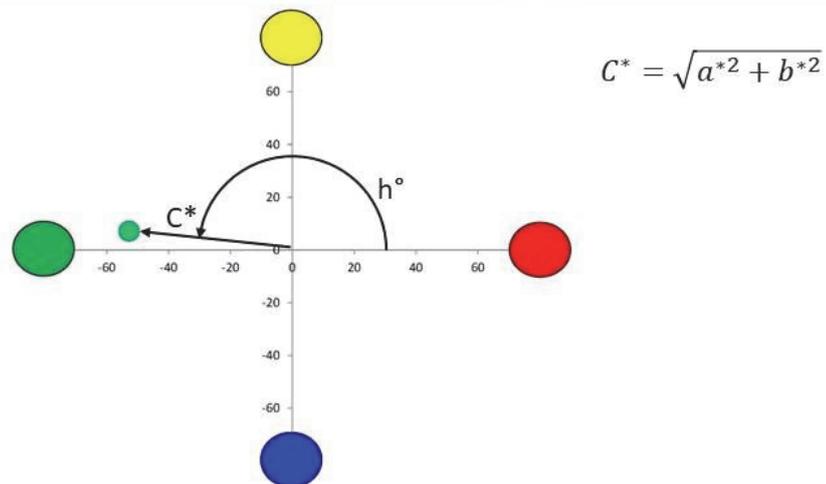
$$L^* = L^*$$

$$C^* = \sqrt{a^{*2} + b^{*2}}$$

$$h = \begin{cases} \arctan\left(\frac{b^{*2}}{a^{*2}}\right) & \text{wenn } \arctan\left(\frac{b^*}{a^*}\right) \geq 0 \\ \arctan\left(\frac{b^{*2}}{a^{*2}}\right) + 360^\circ & \text{ansonsten} \end{cases}$$

L*	a*	b*
45.65	-49.64	3.47
L*	C*	h
45.65	49.76	176°

## L\*C\*h°-Darstellung



- Alternative Darstellung mit Chroma C\* und h° (Buntonwinkel zwischen Rot-Achse und Verbindungslinie)

## Das u'v'-System

- Das u'v'-System bietet eine bessere Darstellung der Gleichabständigkeit der Empfindungen
- Die Helligkeitsachse L\* steht senkrecht im Weißpunkt
- Helligkeitsmaßstab ist die Munsell-Helligkeitskala
- Die Helligkeitsabstufungen sind logarithmisch (psychometrische Funktion)

## Umrechnung in u'v'

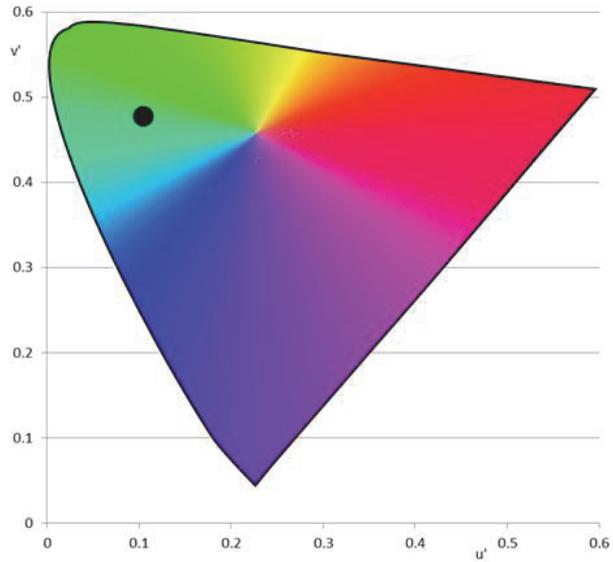
$$u' = \frac{4X}{X + 15Y + 3Z} = \frac{4x}{-2x + 12y + 3}$$

$$v' = \frac{9Y}{X + 15Y + 3Z} = \frac{9y}{-2x + 12y + 3}$$

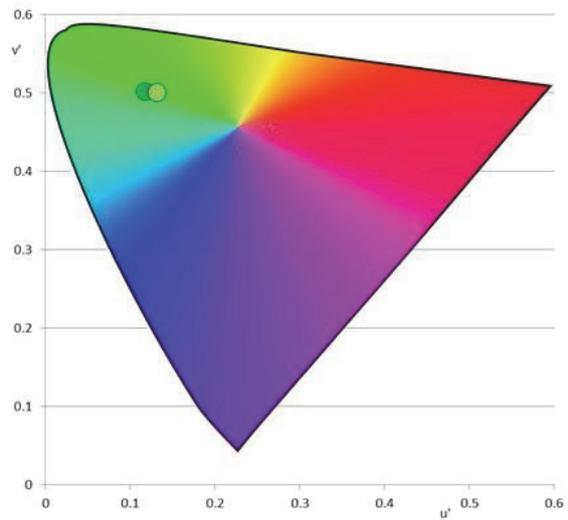
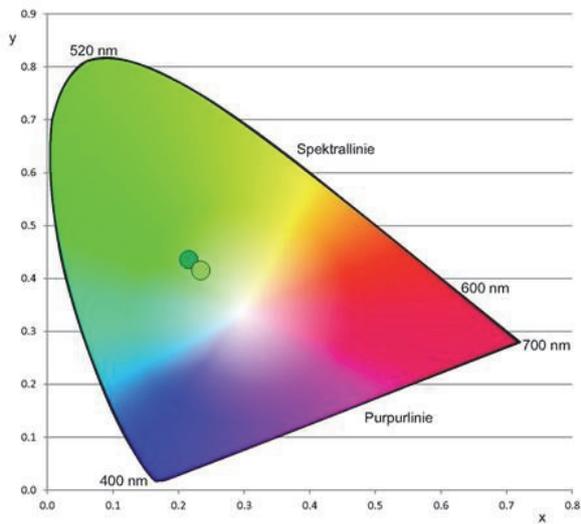
nm	x	y	z	u'	v'
400	0.1650	0.0183	0.8167	0.2284	0.0569
405	0.1639	0.0172	0.8189	0.2278	0.0537
410	0.1630	0.0165	0.8205	0.2269	0.0518
415	0.1613	0.0159	0.8228	0.2248	0.0500
420	0.1596	0.0159	0.8245	0.2223	0.0498
⋮					
680	0.7227	0.2774	0.0000	0.5920	0.5112
685	0.7230	0.2770	0.0000	0.5928	0.5111
690	0.7231	0.2769	0.0000	0.5932	0.5110
695	0.7233	0.2767	0.0000	0.5935	0.5110
700	0.7233	0.2767	0.0000	0.5936	0.5110

## Golfgrün im u'v'-System

Golfgrün				
L*	45.65		u'	0.1106
a*	-49.66		v'	0.4883
b*	3.47			
C*	49.7811			
h*	176.0029			



## Zwei Grüns im u'v'- und a\*b\*-System



## Umrechnung

- Umrechnung der Farbwerte in verschiedene Systeme  
<https://www.easyrgb.com/en/convert.php#inputFORM>

CIE-L*ab (D65/10°) = 45.65 -49.64 3.47						
sRGB	0-255	=	-182.229	127.265	100.962	D65/2°
sRGB	0-1.0	=	-0.71462	0.49908	0.39593	
RGB	Adobe 98	=	44.178	126.277	102.053	
HSL	0-1.0	=	0.48584	-5.63083	-0.10777	174.90°
HSV	0-1.0	=	0.48584	2.43189	0.49908	
HSI	0-1.0	=	0.48584	12.88509	0.06013	
CMY	0-1.0	=	1.71462	0.50092	0.60407	
CMYK	0-1.0	=	2.43189	0.00000	0.20668	0.50092
CMYK	0-100	=	243.189	0.000	20.668	50.092
XYZ		=	7.654	15.012	14.581	D65/10°
Yxy		=	15.012	0.20549	0.40303	
CIE-L*ab		=	45.650	-49.640	3.470	
CIE-L*Ch(ab)		=	45.650	49.761	176.001°	
CIE-L*uv		=	45.650	-51.729	11.243	
CIE-L*Ch(uv)		=	45.650	52.937	167.738°	
HunterLab		=	38.745	-30.831	2.443	

Vielen Dank für Ihre Aufmerksamkeit!

